

# 常時微動による構造物の動特性評価法について

竹 内 吉 弘\*

## On Estimation of Dynamic Characteristics of Building Structure from Micro-Tremors

Yoshihiro TAKEUCHI

(Received Oct. 15, 1972)

Output response of building structure due to micro-tremors is considered as random process, and then statistical method of stationary time series analysis can be applied to estimation of dynamic characteristics of building structure. In this paper, effect of optimum lag window and assumption of input spectrum are discussed numerically in evaluation procedure of output spectral density, from which dynamic characteristics is determined. To effect of lag window, numerical computation is carried out with following four kinds of lag windows; DO NOTHING, BARTLETT, HANNING, HAMMING. Influence of pattern of input spectrum to estimation is analyzed, with regard to two cases of band limited white spectrum and decline power spectrum. As a result, it is appointed that estimation value is not severely affected by selection of lag window and assumption of input characteristics.

### 1 ま え が き

通常、実在構造物のもつ動力学特性を評価しようとする場合は、起振器などによる強制振動実験あるいは自由振動実験等による共振曲線や自由振動波形より構造物の固有周期、振動モード、減衰比の検出を行なうのが一般であるが、ここで問題とするのはこのような構造物に特定の外力を加えて実験を行なうことなく、構造物の常時微動測定を行ない各部の出力応答を計測してその確率統計量より動力学特性を評価しようとする場合である。構造物の出力応答に関する統計量としては平均値、自乗平均値、相関関数、スペクトル密度等が問題となるが、一般的には構造物系の伝達関数あるいは周波数応答関数の評価を目的とすることになり、ここでは主として入出力のスペクトル密度による表現に関して検討を加える。

常時微動時の構造物の動的挙動についてその入力地盤の常時微動および自然風が直接上部構造に作用する場合の二種が考えられ、両者は入力としてそれぞれ

異なる性格を有するものであるが、一般にはこれ等を正確に計測、評価することは困難である。従って構造物系の入出力の計測より系の伝達特性を決定する所謂 *synthesis* の問題はここでは入力の特性をあらかじめ仮定し出力のみより伝達特性を決定することとなる。特に自然風の性質に関しては構造物系に対して多入力の問題となり、それぞれの空間的な相関性を規定することが必要となる。しかしながら現実には構造物に加わる自然風の風圧変動が構造物各部に於いて大きく異なる統計的性質を持つとは考え難い。これを同一の性質であるとすれば問題の取扱いには地盤よりの入力の場合と同じとなる。

従来より建築構造物については、他の振動実験と並行して常時微動測定が行なわれ、1次ないし2次までの固有周期に関しては自己相関関数あるいはスペクトル密度の計算より他の実験法と比較して十分な精度で検出しうることが確認されている<sup>1)</sup>。しかし固有周期の検出の場合の如く例えば計算されたスペクトル密度

\* 建設工学科

のピーク値の1点のみでなく、考察対象とする固有周期を含む広い周波数帯域に於けるスペクトル密度曲線全体を必要とする伝達関数の決定や減衰比の評価については実測データからのスペクトル密度の計算方法が大きく影響することになる。この点に関しては既に一自由度系に対し入力に white spectrum を仮定した上で、実測データの有限長さが減衰比の評価に与える影響について数値解析を行ない、実在の鉄骨構造物に適応した結果を報告した<sup>2)</sup>。

本論文ではこの問題を更に具体的に検討するため、実測データの有限性が本質的に含む種々の window の選択による影響と、入力外乱の特性として non-white spectrum を仮定した場合に生ずるゆらぎについての数値的検討を行なった。また更に多自由度系構造物を取扱った場合の伝達関数 matrix の決定法に対し、若干の解析的な検討を加えた。

## 2 スペクトル密度の推定

ある有限時間区間内の常時微動の実測記録より構造物系の動特性を統計的手法により評価する場合は、一般には自己または相互相関関数およびそのフーリエ変換であるスペクトル密度を求めるか、あるいは実測記録を直接フーリエ変換していわゆるペリオドグラムとしてスペクトル密度を推定するかのいずれかである。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & D_0(\tau) = 1 \quad |\tau| \leq \tau_d \\
 & = 0 \quad |\tau| > \tau_d \quad (\text{DO NOTHING window}) \\
 & Q_0(\omega) = 2\tau_d \frac{\sin \omega \tau_d}{\omega \tau_d} \\
 (2) \quad & D_1(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_d} \quad |\tau| \leq \tau_d \\
 & = 0 \quad |\tau| > \tau_d \quad (\text{BARTLETT window}) \\
 & Q_1(\omega) = \tau_d \left( \frac{\sin \omega \tau_d}{\omega \tau_d} \right)^2 \\
 (3) \quad & D_2(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi \tau}{\tau_d} \right) \quad |\tau| \leq \tau_d \\
 & = 0 \quad |\tau| > \tau_d \quad (\text{HANNING window}) \\
 & Q_2(\omega) = \frac{1}{2} Q_0(\omega) + \frac{1}{4} \left( Q_0 \left( \frac{\omega}{2\pi} + \frac{1}{2\tau_d} \right) + Q_0 \left( \frac{\omega}{2\pi} - \frac{1}{2\tau_d} \right) \right) \\
 (4) \quad & D_3(\tau) = 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi \tau}{\tau_d} \quad |\tau| \leq \tau_d \\
 & = 0 \quad |\tau| > \tau_d \quad (\text{HAMMING window}) \\
 & Q_3(\omega) = 0.54 + 0.23 \left( Q_0 \left( \frac{\omega}{2\pi} + \frac{1}{2\tau_d} \right) + Q_0 \left( \frac{\omega}{2\pi} - \frac{1}{2\tau_d} \right) \right)
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$\tau_d$  ; 最大遅れ時間,  $D_i(\tau) \supset Q_i(\omega)$ ,  $i=0,1,2,3$

一自由度系の単位衝撃関数および伝達関数をそれぞれ  $g(t)$ ,  $G(j\omega)$  とすれば,

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega_0 t} \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 t \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jh\omega_0 \omega}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

いずれも有限長さのデータに対する数値フーリエ変換を行なうことになり、当然推定量の resolution および stability に対し適当な window を選択する必要がある。唯、推定量としてはペリオドグラムによるものは一致推定量でなく、数値計算を行なう場合には stability の点より相関関数による方が普通である。

この問題に関しては一自由度系を対象として解析的に既に論じたところであるが<sup>3)</sup>、通常の構造物系を対象としてこれを多質点系として取扱う場合には、系の持つ減衰性は少なくその伝達特性は固有振動数の点で一般に急峻なピークを持つ曲線となり、固有周期の検出に関してはデータの有限性は殆んど問題とならないが<sup>4)</sup>、減衰量の検出は大きく影響を受け修正が必要となる。

ここでは減衰量の評価の問題について、i) window の選択による resolution と stability, ii) non-white spectrum 入力の想定、の二点に分けそれぞれについて検討を行なった。

i) window の選択による resolution と stability ;

ここでは、一自由度系が white spectrum を受ける場合について、Blackman と Tukey により提案された次の4種の window<sup>4)</sup> について検討する。

$\omega_0$  : 無減衰時の固有円振動数,  $h$  : 臨界減衰比,  $j$  : 虚数単位

入出力の自己相関関数およびスペクトル密度,  $R_0(\tau)$ ,  $R_I(\tau)$ ,  $S_0(\omega)$ ,  $S_I(\omega)$ , は white spectrum の入力に対し次の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} R_0(\tau) &= \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty g(\eta)g(\lambda)R_I(\tau+\lambda-\eta)d\eta \\ &= \frac{\pi_0 S}{2h\omega_0^3} e^{-h\omega_0\tau} \left( \cos\sqrt{1-h^2}\omega_0\tau + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin\sqrt{1-h^2}\omega_0\tau \right) \\ S_0(\omega) &= |G(j\omega)|^2 S_I(\omega) = \frac{2\pi_0 S}{\omega^4 + 2(2h^2 - 1)\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

$$R_I(\tau) \supset S_I(\omega), \quad R_0(\tau) \supset S_0(\omega), \quad g(t) \supset G(j\omega),$$

$\pi_0 S$  : 入力 spectrum の power レベル,

ここで評価スペクトル密度を  ${}_E S_0(\omega)$  とすれば実測データの有限性より次式の如く window を含むフーリエ変換か, または振動数領域における convolution であらわされる。

$$\begin{aligned} {}_E S_0(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty R_0(\tau) D_i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S_0(\omega) * Q_i(\omega), \quad i=0,1,2,3 \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

(\*は convolution を示す)

上記の 4 種類の window に対する (4) 式の評価スペクトル密度は不定積分もしくは留数定理を用いることにより計算することができ, 次の結果となる。

(a) DO NOTHING window ;

$${}_E S_0(\omega) = \frac{2\pi_0 S}{F(\omega)} \left[ \frac{e^{-h\omega_0\tau_d}}{2h\omega_0^3} \{ (I_1(\omega) + I_2(\omega)\omega^2) \cos\omega\tau_d + (I_3(\omega) + I_4(\omega)\omega^2) \omega \sin\omega\tau_d \} + 1 \right] \dots\dots\dots(5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1(\omega) &= \omega_0^3 \left( \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} \sin\omega_0'\tau_d - 2h \cos\omega_0'\tau_d \right) \\ I_2(\omega) &= -\frac{\omega_0}{\sqrt{1-h^2}} \sin\omega_0'\tau_d \\ I_3(\omega) &= \omega_0^2 (4h^2 - 1) \cos\omega_0'\tau_d + \frac{\omega_0^2\tau_d}{\sqrt{1-h^2}} (4h^2 - 3) \sin\omega_0'\tau_d \\ I_4(\omega) &= \cos\omega_0'\tau_d + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin\omega_0'\tau_d \\ F(\omega) &= \omega^4 + 2(2h^2 - 1)\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 \\ \omega_0' &= \sqrt{1-h^2}\omega_0 \end{aligned} \right\} \text{ ((a), (b), (c) 共通)} \dots\dots\dots(5')$$

(b) BARTLETT window ;

$${}_E S_0(\omega) = \frac{\pi_0 S}{h\omega_0^3} \left[ \frac{2h\omega_0^3}{F(\omega)} + \frac{1}{F(\omega)^2} \frac{1}{\tau_d} \left\{ J_1(\omega) - e^{-h\omega_0\tau_d} (J_1(\omega) \cos\omega_0'\tau_d \cos\omega\tau_d \right. \right. \\ \left. \left. + J_2(\omega) \sin\omega_0'\tau_d \sin\omega\tau_d + J_3(\omega) \sin\omega_0'\tau_d \cos\omega\tau_d + J_4(\omega) \cos\omega_0'\tau_d \sin\omega\tau_d \right) \right\} \right] \dots\dots\dots(6)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &= (\omega^2 + \omega_0^2)^3 - 4\omega_0^2(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^2 + h\omega_0^2) - 8h^2\omega_0^2\omega^2(1 - 2h^2)\omega_0^2 - \omega^2 \\ J_2(\omega) &= -\frac{2\omega_0\omega}{\sqrt{1-h^2}} \{ (\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^2 + h\omega_0^2) - \omega_0^2(1 - h^2) \\ &\quad \times ((8h^2 - 1)\omega_0^2 + 3\omega^2) \} \\ J_3(\omega) &= \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \{ (\omega^2 + \omega_0^2)^3 + 2\omega_0^2(\omega^2 + \omega_0^2)((1 - 2h^2)\omega_0^2 - \omega^2) \\ &\quad - 8\omega_0^2\omega^2(1 - h^2)(\omega^2 + 2h^2\omega_0^2) \} \\ J_4(\omega) &= 8h\omega_0^3 \{ (2h^2 - 1)\omega_0^2 + \omega^2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6')$$

(c) HANNING window ;  $(\dots\dots C_1=0.5, \quad C_2=0.5)$   
 HAMMING window ;  $(\dots\dots C_1=0.54, \quad C_2=0.46)$

$$\begin{aligned}
E S_0(\omega) = & \frac{\pi_0 S}{\omega_0^4} \left( \frac{C_1}{F(\omega)} \left[ \frac{e^{-h\omega_0 \tau_d}}{h} \{ (I_1(\omega) + I_2(\omega)\omega^2) \cos \omega \tau_d + (I_3(\omega) \right. \right. \\
& \left. \left. + I_4(\omega)\omega^2) \omega \sin \omega \tau_d \} + 2 \right] \right. \\
& + C_2 \left[ \frac{\omega_0^4 e^{-h\omega_0 \tau_d}}{E_1(\omega) E_2(\omega)} \{ (\cos \omega'_0 \tau_d + R_1(\omega) \sin \omega'_0 \tau_d) \cos \omega \tau_d \right. \\
& \left. + (R_2(\omega) \cos \omega'_0 \tau_d + R_3(\omega) \sin \omega'_0 \tau_d) \sin \omega \tau_d \} \right. \\
& + \frac{1}{E_1(\omega) E_2(\omega)} \\
& + \frac{\omega_0^4 e^{-h\omega_0 \tau_d}}{E_3(\omega) E_4(\omega)} \{ (\cos \omega'_0 \tau_d + P_1(\omega) \sin \omega'_0 \tau_d) \cos \omega \tau_d \\
& \left. + (P_2(\omega) \cos \omega'_0 \tau_d + P_3(\omega) \sin \omega'_0 \tau_d) \sin \omega \tau_d \} \right. \\
& \left. + \frac{1}{E_3(\omega) E_4(\omega)} \right] \Bigg) \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

$I_1(\omega)$ ,  $I_2(\omega)$ ,  $I_3(\omega)$ ,  $I_4(\omega)$  は (a) と同じ

$r_1 = \left( \frac{\omega \tau_d - \pi}{\omega_0 \tau_d} \right)$ ,  $r_2 = \left( \frac{\omega \tau_d + \pi}{\omega_0 \tau_d} \right)$  として

$$\begin{aligned}
E_1(\omega) &= \omega_0^2 (\gamma_1^2 + 2\sqrt{1-h^2} \gamma_1 + 1) \\
E_2(\omega) &= \omega_0^2 (\gamma_1^2 - 2\sqrt{1-h^2} \gamma_1 + 1) \\
E_3(\omega) &= \omega_0^2 (\gamma_2^2 + 2\sqrt{1-h^2} \gamma_2 + 1) \\
E_4(\omega) &= \omega_0^2 (\gamma_2^2 - 2\sqrt{1-h^2} \gamma_2 + 1) \\
R_1(\omega) &= \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}} (2h^2 - 1 + r_1^2) \\
R_2(\omega) &= -\frac{1}{2h} r_1 (4h^2 - 1 + r_1^2) \\
R_3(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}} r_1 (3 - 4h^2 + r_1^2) \\
P_1(\omega) &= \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}} (2h^2 - 1 + r_2^2) \\
P_2(\omega) &= -\frac{1}{2h} r_2 (4h^2 - 1 + r_2^2) \\
P_3(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}} r_2 (3 - 4h^2 + r_2^2)
\end{aligned} \dots\dots\dots (7)'$$

評価スペクトル密度より系の固有振動数および減衰比を評価するため、(5), (6), (7) 式で求められた (a), (b), (c) における  $E S_0(\omega)$  の計算結果より定まる伝達特性曲線より、その固有振動数のピーク値に対する  $\text{power}^{1/2}$  の振動数巾より見かけの減衰比を読取れば、減衰比のみは有限時間巾  $\tau_d$  が小さくなるに従って極めて過大に評価される結果となる。今これを検討するため、それぞれの window に対する評価スペクトル密度より算出される見かけの減衰比  $h_e$  と有限時間巾  $\tau_d$  との関係を真の減衰比  $h$  をパラメーターとして計算したものが Fig. 1 および Fig. 2 である。両図より明らかなようにいずれの window についても  $\tau_d$  が大きくなるに従い見かけの減衰比  $h_e$  は真の減衰比に急速に近づく。またそれぞれの window については  $D_0$  window の見かけの減衰比  $h_e$  に対し、 $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  の各 window

の  $h_e$  は図中上側にあり over estimate となっている。このことは一般論としてはこれ等の window が  $D_0$  window に対して resolution は低下する反面 stability は向上していることを示唆するものである。これを更に具体的に検討するため、実在の鉄骨 5 階建整形ラーメン構造物で実測された常時微動の 10 個の測定記録に、 $D_0$  window および  $D_1$  window によるスペクトル密度の計算を行なった。計算されたスペクトル密度曲線の一例を Fig. 3 に示す。またこれ等の計算結果より 1 次および 2 次の固有振動数  $f_0$  および見かけの減衰比  $h_e$  を算出し、Table 1 に示した。Table 欄外の真の減衰比  $h$  の値は Fig. 1 を利用して計算したものである。Table 1 より明らかなように固有振動数の検出に関してはいずれの場合も殆んど安定した結果を得るが、減衰比についてはかなりのバラツキが見られ、か

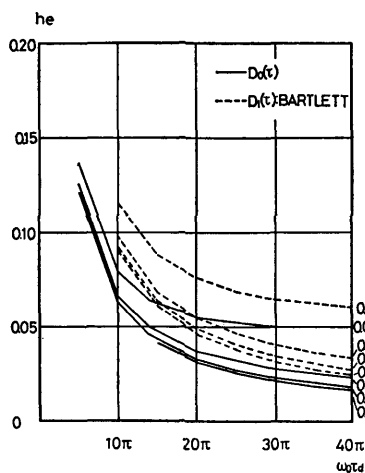


Fig. 1 Relation between estimated damping ratio  $h_e$  and maximum lag time  $\tau_d$  ( $D_0(\tau)$  and  $D_1(\tau)$ )

つ当初の予想に反して分散の値に示されるように  $D_1$  windowの方が  $D_0$  windowよりバラツキが大きい。これは入力外乱のスペクトル特性の固有振動数付近での平坦さの仮定が成立していれば当然 stabilityが増加する筈であるが、実測対象とした構造物系においては減衰量が非常に小さく伝達特性が固有振動数付近で極めて急峻なピークを持ち、Fig. 3でも示されているように  $D_1$  windowは固有振動数付近で  $D_0$  windowより broadな巾の曲線を与える結果となるため、この場合は勿ろ入力特性の non-white な特性や non-sta-

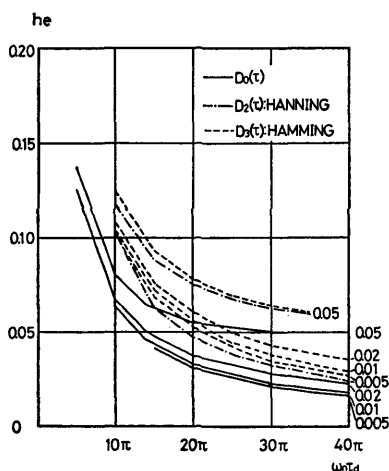


Fig. 2 Relation between estimated damping ratio  $h_e$  and maximum lag time  $\tau_d$  ( $D_0(\tau)$ ,  $D_2(\tau)$  and  $D_3(\tau)$ )

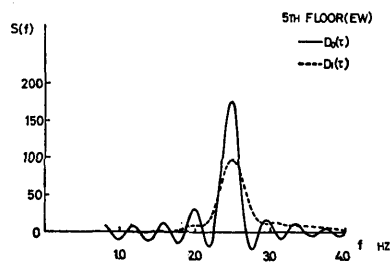


Fig. 3 Power spectral density calculated from micro-tremors of steel frame structure

Table 1 Natural frequency and critical damping ratio evaluated from estimated power spectral density

evaluated from estimated power spectral density													(Ave.)	(Var.)
(DO NOTHING window)	$D_0(\tau)$	$f_0$	1.85	1.86	1.86	1.84	1.85	1.85	1.86	1.86	1.84	1.85	1.85 (Hz)	
		$h_e$	1.80	1.77	1.89	2.01	1.89	1.77	1.77	1.85	2.04	1.84	1.86 (%)	$2.4 \times 10^{-2}$
(BARTLETT window)	$D_1(\tau)$	$f_0$	1.85	1.86	1.86	1.84	1.85	1.85	1.86	1.86	1.84	1.85	1.85 (Hz)	
		$h_e$	2.71	2.63	2.81	3.07	2.75	2.69	2.61	2.87	3.12	2.80	2.81 (%)	$3.4 \times 10^{-2}$
fundamental natural frequency													$(h=0.55\% \cdots D_0)$ $(=0.60\% \cdots D_1)$	
													(Ave.)	(Var.)
(DO NOTHING window)	$D_0(\tau)$	$f_0$	5.62	5.62	5.62	5.61	5.63	5.61	5.62	5.62	5.61	5.63	5.62 (Hz)	
		$h_e$	0.63	0.65	0.60	0.59	0.64	0.68	0.65	0.63	0.66	0.60	0.63 (%)	$1.9 \times 10^{-2}$
(BARTLETT window)	$D_1(\tau)$	$f_0$	5.62	5.62	5.62	5.61	5.63	5.62	5.62	5.62	5.61	5.63	5.62 (Hz)	
		$h_e$	0.95	0.97	0.91	0.96	1.13	1.02	0.95	0.97	1.02	0.90	0.98 (%)	$1.9 \times 10^{-1}$
2nd natural frequency													$(h=0.60\% \cdots D_0)$ $(=0.90\% \cdots D_1)$	

tionary の影響の方を強く受けた結果であると考えられる。従って一般に減衰比の小さい通常の建築構造物については stability を得る目的で  $D_1$ ,  $D_2$  あるいは  $D_3$  window を使用した場合はその効果は期待できないと考えてよい。

## ii) non-white spectrum 入力 of 想定

既に述べたように構造物の常時微動測定についてはその入力スペクトルの特性は、ある程度 apriori に規定される必要があり、今迄は入力は white spectrum を持つとして論じて来た。しかしながら現実においては勿論厳密には平坦でなく、その影響は評価量のバラツキとして解析結果にあらわれると考えられる。現在迄の実験結果より見てその影響は固有周期の検出においてでなく減衰量の検出にあらわれるので、ここでは定量的にどの程度の影響を受けるかについて考察を加える。

(3)式における入出力スペクトル密度の関係式より見ても、入力スペクトル密度の仮定は直接に出力スペクトル密度に影響を与えるものであり、解析結果は入力特性の想定に大きく左右されるのは当然である。一般

の構造物の常時微動に関する入力特性は特別の場合を除いて一般的には構造物系にとって問題となる振動数帯域で若干個の比較的ゆるやかなピークを有するとして妥当であろうと考えられるのでは、ここで Fig. 4 および Fig. 6 に示すように band limited white spectrum と固有振動数付近で勾配を持つような 2 種類の入力特性を想定し、case I の band limited white spectrum に対してはその切断振動数帯域を変化させ、case II に関しては固有振動数付近における勾配を変化させて評価結果に対する影響の数値的検討を行なった。

i) と同様(4)式に対して不定積分もしくは留数定理等より求めるが、前節の結果よりここでは  $D_0$  window を使用した。結果は以下の通りである。

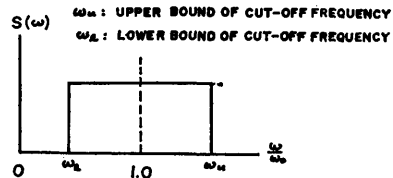


Fig. 4 Pattern of input characteristics of case I

## (1) case I ;

$$S(\omega) = {}_0S \{s(\omega - \omega_l) - s(\omega - \omega_u)\}, \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{cases} \omega_u = \omega_0'(1 + \alpha) : \text{上限振動数} \\ \omega_l = \omega_0'(1 - \alpha) : \text{下限振動数} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \\ s : \text{ステップ関数} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ES_0(\omega) = & \frac{{}_0S}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2} \left[ \text{Si}((1 + \alpha)\omega_0'\tau_d + \omega\tau_d) + \text{Si}((1 + \alpha)\omega_0'\tau_d - \omega\tau_d) \right. \\ & - \text{Si}((1 - \alpha)\omega_0'\tau_d + \omega\tau_d) - \text{Si}((1 - \alpha)\omega_0'\tau_d - \omega\tau_d) \\ & + \frac{e^{-h\omega_0'\tau_d}}{4h\omega_0^3} \left\{ - \left( 2h\omega_0^2\theta_1(\alpha, \tau_d) + \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - h^2}}(\omega^2 - \omega_0^2 + 2h^2\omega_0^2)\theta_2(\alpha, \tau_d) \right) \cos\omega_0'\tau_d \cos\omega\tau_d \right. \\ & + \left( \frac{h\omega_0}{\sqrt{1 - h^2}}(\omega^2 - 3\omega_0^2 + 4h^2\omega_0^2)\theta_1(\alpha, \tau_d) \right. \\ & \quad \left. \left. - \omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 4h^2\omega_0^2)\theta_2(\alpha, \tau_d) \right) \sin\omega_0'\tau_d \sin\omega\tau_d \right. \\ & + \left( \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - h^2}}(\omega_0^2 - \omega^2 - 2h^2\omega_0^2) \left( \theta_1(\alpha, \tau_d) + \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}(2 + \alpha)\right) \right) \right. \\ & \quad \left. + 2h\omega_0^2(\theta_2(\alpha, \tau_d) - \text{In}\left(\frac{h^2 + (2 - \alpha)^2(1 - h^2)}{h^2 + (2 + \alpha)^2(1 - h^2)}\right)) \right) \sin\omega_0'\tau_d \cos\omega\tau_d \\ & + \left( \omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 4h^2\omega_0^2) \left( \theta_1(\alpha, \tau_d) + \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}(2 + \alpha)\right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}(2 - \alpha)\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}\alpha\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{h\omega}{\sqrt{1 - h^2}}(\omega^2 - 3\omega_0^2 + 4h^2\omega_0^2) \left( \theta_2(\alpha, \tau_d) - \text{In}\left(\frac{h^2 + (2 - \alpha)^2(1 - h^2)}{h^2 + (2 + \alpha)^2(1 - h^2)}\right) \right) \right. \\ & \quad \left. \left. \times \cos\omega_0'\tau_d \sin\omega\tau_d \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1(\alpha, \tau_d) &= 2 \int_0^{\tau_d} \frac{1}{\tau} \cosh(h\omega_0 \tau) (\sin(2+\alpha)\omega_0' \tau - \sin(2-\alpha)\omega_0' \tau + 2\sin\alpha\omega_0' \tau) d\tau \\
 \theta_2(\alpha, \tau_d) &= 2 \int_0^{\tau_d} \frac{1}{\tau} \cosh(h\omega_0 \tau) (\cos(2+\alpha)\omega_0' \tau - \cos(2-\alpha)\omega_0' \tau) d\tau \\
 \phi_1(\alpha, \tau_d) &= 2 \int_0^{\tau_d} \frac{1}{\tau} \sinh(h\omega_0 \tau) (\sin(2+\alpha)\omega_0' \tau - \sin(2-\alpha)\omega_0' \tau + 2\sin\alpha\omega_0' \tau) d\tau \\
 \phi_2(\alpha, \tau_d) &= 2 \int_0^{\tau_d} \frac{1}{\tau} \sinh(h\omega_0 \tau) (\cos(2+\alpha)\omega_0' \tau - \cos(2-\alpha)\omega_0' \tau) d\tau
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)'$$

$$\left( \begin{array}{l}
 \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \dots\dots \text{積分正弦関数} \\
 \text{Acrtan}(x) = \arctan(x) \text{の主値} \\
 \text{Ln}(x) = \log_e x
 \end{array} \right)$$

(2) case II ;

$$S(\omega) = \frac{{}_0S}{1 + \left(\frac{\omega}{z}\right)^2} = \frac{{}_0S}{1 + u^2}, \quad \left(u = \frac{\omega}{z}\right) \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned}
 ES_0(\omega) &= \frac{{}_0S}{u^4 + 2u^2(1 - 2h^2) + 1} \left[ \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4h^2\omega_0^2\omega^2} \left\{ 2(1 - 2h^2)u^2 + 1 - u^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{e^{-h\omega_0\tau_d}}{2h} (M_1(u)\cos\omega_0'\tau_d\cos\omega\tau_d + M_2(u)\sin\omega_0'\tau_d\sin\omega\tau_d \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + M_3(u)\sin\omega_0'\tau_d\cos\omega\tau_d + M_4(u)\cos\omega_0'\tau_d\sin\omega\tau_d \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2(\omega^2 + \alpha^2)} \left\{ 1 + e^{-\alpha\tau} \left( -\cos\omega\tau_d + \frac{\omega}{\alpha} \sin\omega\tau_d \right) \right\} \right]
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_1(u) &= -2h \left\{ 2(1 - 2h^2)u^2 + 1 - u^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right\} \\
 M_2(u) &= \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \left\{ (4h^2 - 3) - u^2(5 - 20h^2 + 16h^4) \right. \\
 &\quad \left. + (1 + (3 - 4h^2)u^2) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right\} \\
 M_3(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}} \left\{ (1 - 2h^2) + u^2(1 - 8h^2 + 8h^4) \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 + u^2(1 - 2h^2) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) \right\} \\
 M_4(u) &= \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \left\{ (1 - 4h^2) - u^2(1 - 12h^2 + 16h^4) \right. \\
 &\quad \left. + ((1 - 4h^2)u^2 + 1) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)'$$

先ず case I の band limited white spectrum の (9) 式に対する数値計算結果を Fig. 5 に示す。図は縦軸に見かけの減衰比  $h_e$  を横軸に切断振動数域を示すパラメーター  $\alpha$  をとり、また図中の平行な破線はそれぞれのパラメーター  $h$  および  $\omega_0\tau_d$  に対応する white spectrum の場合の見かけの減衰比  $\bar{h}_e$  をあらわしたものである。図は  $\alpha$  の値が大きいく程、また同じ  $\alpha$  の値に対して減衰比の少さい程、white spectrum の値に近づく予想された傾向を示している。 $\alpha=1.0$  は入力スペクトルが固有振動数を中心として、その2倍の振動数領域にのみ存在する場合であるが、white spec-

trum の場合と比較して 図中殆んど差異を示していない。 $h=0.03$  の場合でも 0.7% 程度に過ぎず殆んど一致している。また  $\alpha=0.5$  の場合においてもその差は 3% 以内である。

case II については (11) 式による固有振動数と減衰比の数値計算結果を Table 2 に示す。この場合には入力スペクトルが固有振動数付近を傾斜しながら横切っていてその傾斜の度合の影響についての検討であり、傾斜の度合は Fig. 6 に  $\left(\frac{\omega_0}{z}\right)$  をパラメーターにして示されている。解析は  $\left(\frac{\omega_0}{z}\right)=0.1 \sim 1.5$  の間で行なったが

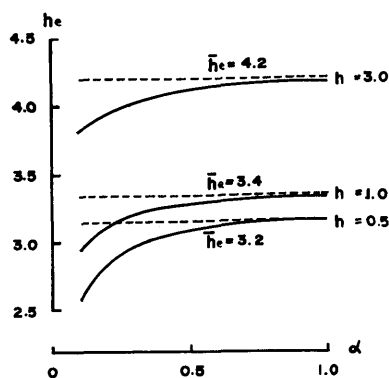


Fig. 5 Relation between estimated damping ratio  $h_e$  and cut-off frequency range  $\alpha$  in case of band limited white spectrum

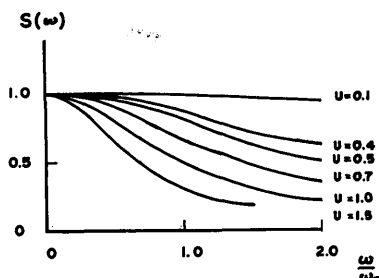


Fig. 6 Pattern of input characteristics of case II

Table 2 Comparison of the values of natural frequency and estimated damping ratio between the case of white spectrum and case II.

critical damping ratio (h)	natural frequency ( $\frac{f}{f_0}$ )	estimated damping ratio ( $\frac{h_{e0}}{h_e}$ )
0.05	0.996	0.989
0.04	0.997	0.992
0.03	0.998	0.993
0.02	0.999	1.000
0.01	0.999	1.000

$$\left(\frac{\omega_0}{z}\right) = 1.0, \omega_0 \tau_d = 20\pi$$

$f_0, h_{e0}$  : natural frequency, estimated damping ratio (white spectrum)

$\left(\frac{\omega_0}{z}\right) = 1.5$  の場合においても,  $h = 0.01, \omega_0 \tau_d = 20\pi$  の場合において見かけの減衰比は white spectrum に

対して 0.994 の割合の under estimate に過ぎない。Table 2 より明らかなように減衰が大きくなるにつれ次第に誤差は増加するが高々 0.1 % 以下であり, 入力特性が勾配を持つことによる減衰比の評価への影響は僅かであるといえる。

### 3 多質点構造物の伝達関数 matrix

入出力よりシステム動特性の同定あるいは推定問題を建築構造物に適用しようとする場合, 大別して二通りの問題が考えられる。一つは広く種々の規模, 平面形あるいは機態を持つ構造物や地盤を問題として一般的にその系の伝達関数モデルおよびそのパラメーターを全て未知であるとして取扱う場合であり, 他の一つはラーメン形式の構造物や煙突の如き塔状構造物で, その動特性が構造力学的に明快であるようなものに対し伝達関数モデルの形は規定されているとし, それに含まれるパラメーターのみを推定する場合である。勿論前者の取扱いは後者をも含みより一般的であるといえるが, 通常の建築構造物を問題とする限りその層数に等しい多質点系に動力学モデルを置換して構造力学的な設計にはほぼ妥当であり, また他の特殊な構造物に関しても伝達関数モデルの形式を含めて問題とするよりあらかじめ想定されたモデルのパラメーターのみを正確に推定する方が現実性に則しているといえる。従ってここでは問題を多質点系モデルのパラメーター推定に限定して考察する。

一般に多質点構造物の基礎運動方程式は運動座標系で次式のようなになる。

$$[a] \frac{d^2}{dt^2} \{x(t)\} + [b] \frac{d}{dt} \{x(t)\} + [c] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで  $[a]$  ; 質量分布 matrix,  $[c]$  ; 減衰係数 matrix,  $[c]$  ; 剛性分布 matrix で, それぞれ real square matrix であり, また  $\{x\}$  ; 運動変位ベクトル,  $\{f\}$  ; 入力外乱ベクトルである。ここで多質点系モデルを構造物の層数  $n$  に等しい  $n$  質点系に置換すれば基礎部分の回転を含めて  $[a], [b], [c]$  はそれぞれ real square で, かつ symmetric な以下の matrix となる。

$$[a] = \begin{pmatrix} m_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & m_n & \\ 0 & & & \bar{m}_R \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$(\bar{m}_R = \sum_{j=0}^n m_j R)$$



$$[b] = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n d_{0j} + d_0^e, & -d_{01}, & -d_{02}, & \dots, & -d_{0n}, & -\sum_{j=0}^n d_{0j}(h_0 - h_j) \\ -d_{10}, & \sum_{j=0}^n d_{1j} + d_1^e, & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ -d_{n0}, & & & & & \vdots \\ -\sum_{j=0}^n d_{jn}(h_0 - h_j), & \dots, & \dots, & \dots, & \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{k=0}^j d_{jk}(h_j - h_k)^2 \right\} + d_R & \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$[c] = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n k_{0j}, & -k_{01}, & \dots, & -k_{0n}, & -\sum_{j=0}^n k_{0j}(h_0 - h_j) \\ -k_{01}, & \sum_{j=0}^n k_{1j} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -k_{n0}, & & & & \vdots \\ -\sum_{j=0}^n k_{jn}(h_0 - h_j), & \dots, & \dots, & \dots, & \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{k=0}^j k_{jk}(h_j - h_k)^2 \right\} + k_R & \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$j = G, 0, 1, 2; n$$

ここで  $m_i$  :  $i$  質点質量,  $m^R$  : 回転慣性,  $d^e$ ,  $d$  : 外部及び内部粘性減衰,  $d_R$  : 基礎回転粘性減衰,  $k$  : 剛性,  $k_R$  : 基礎回転剛性,  $h_i$  : 基礎より  $i$  質点までの高さで,  $d_{ij}$ ,  $k_{ij}$  はそれぞれ  $i$ - $j$  質点間の減衰, 剛性であることを示す。更に

$$d_{ii} = 0, \quad k_{ii} = 0, \quad h_0 = 0, \quad d_{ij} = d_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

また  $d_{i0} = d_0$ ,  $k_{i0} = k_0$  は基礎地盤に関する内部減衰, 剛性を示す。

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \\ x_\theta \end{Bmatrix}, \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_r \\ f_\theta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$x_i$  :  $i$  質点の地動に対する運動変位,  $x_\theta$  : 基礎回転角,  $f_i$  : 外乱

更に入力外乱  $\{f\}$  に関して, まえがきで述べた如く上部構造に統計的性質の等しい入力に加わると考えれば, 地盤の常時微動, 風圧による入力はいずれ

$$\begin{cases} \{f\} = -\{a\} \ddot{x}_0(t) & \text{: 地盤入力} \\ \{f\} = -\{q\} \eta(t) & \text{: 風圧入力} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$\ddot{x}_0(t)$  : 地盤加速度,  $\{a\}$  : 質量分布 vector,  $\eta(t)$  : 風圧変動加速度,  $\{q\}$  : 風圧分布係数となり, 取扱いは同一となる。また基礎部分が地盤で固定であり, かつ隣接した質点間のみで連成しているとすれば前記の matrix は  $[a]$  : diagonal,  $[b]$ ,  $[c]$  : tri-diagonal となる。

ここで(16)式をラプラス変換すれば

$$([a]s^2 + [b]s + [c])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\{X(s)\} \subset \{x(t)\}, \quad \{F(s)\} \subset \{f(t)\},$$

$$\left. \begin{aligned} \{X(s)\} &= [G(s)]\{F(s)\} \\ \text{あるいは } s=j\omega \text{ として} \\ \{X(j\omega)\} &= [G(j\omega)]\{F(j\omega)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$[G(j\omega)] = (-[a]\omega^2 + j[b]\omega + [c])^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}(j\omega), & A_{12}(j\omega), & \dots & A_{1m}(j\omega) \\ A_{21}(j\omega), & A_{22}(j\omega), & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(j\omega) & \dots & \dots & A_{mm}(j\omega) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$= \begin{pmatrix} G_{11}(j\omega), & G_{12}(j\omega) & \cdots & G_{1m}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega), & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ G_{m1}(j\omega), & \cdots & \cdots & G_{mm}(j\omega) \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで } A_{ii}(j\omega) &= -m_i\omega^2 + j\left(\sum_{l=0}^n d_{il}\omega + d_i\epsilon\right) + \sum_{l=0}^n k_{il}, \quad i=0, 1, \dots, m-1 \\ &= -m_m\omega^2 + j\left(\sum_{l=0}^n \left\{\sum_{k=0}^l d_{lk}(h_l - h_k)^2\right\} + d_R\right) \\ &\quad + \left(\sum_{l=0}^n \left\{\sum_{k=0}^l k_{lk}(h_l - h_k)^2\right\} + k_R\right), \quad i=m \\ A_{i\ell}(j\omega) &= -jd_{i\ell}\omega - k_{i\ell}, \quad i, \ell \neq 1 \text{ or } m \\ &= -j\left\{\sum_{l=0}^n d_{il}(h_l - h_\ell)\right\} - \sum_{l=0}^n K_{i\ell}(h_l - h_\ell), \quad i \text{ or } \ell = m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{また } G(j\omega) &= r_j^t(j\omega)/r(j\omega) \\ &= \frac{\psi_u\omega^u + \psi_{u-1}\omega^{u-1} + \dots + \psi_0}{\phi_v\omega^v + \phi_{v-1}\omega^{v-1} + \dots + \phi_0}, \quad \begin{matrix} v=2n \\ v>u \end{matrix} \\ r(j\omega) &= \det[A_{ij}] \\ r_j^t(j\omega) &: [A] \text{ matrix の } (i, j) \text{ element に関する cofactor} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(19)式に対しては一般に知られているように入出力スベクトル密度 matrix に対して次式が成立する。

$$[S_0(j\omega)] = [G(j\omega)][S_I(j\omega)][G(j\omega)]^* \dots\dots\dots (23)$$

また (23) 式のフーリエ変換により入出力の相関関数 matrix については

$$[R_0(\tau)] = [g(\tau)] \otimes [R_I(\tau)] \otimes [g(-\tau)] \dots\dots\dots (24)$$

\*は transposed conjugate,  $\otimes$  は convolution を示す。

(23)式に対し入力スベクトル密度 matrix を想定し各質点における出力応答より定まる出力スベクトル密度 matrix を用いて伝達関数 matrix  $[G(j\omega)]$  を求める問題に関しては、多入力、多出力系における最適伝達 matrix の推定法に関連した問題として既に論じたところである<sup>5)</sup>。ここでは既に述べた意味から例えば (23) 式の多項式の形で伝達関数モデルが定まるとし、その係数を物理的な現実性のみを考慮して定める問題として考える。現実には多質点構造物系の伝達関数 matrix を定める場合、一般的な状態としては入力外乱のレベルは風圧変動によるものより、地盤の入力の方が大きく支配的であり、かつ (17) 式で述べた如く構造物に加わる風圧力がほぼ空間的に同一の性質を示すものとすれば地盤入力と同じ取扱いになることより、ここでは問題を地盤入力に限定し、また前章に述べた如く比較的一般性を失うことなく入力は white spectrum であると仮定して explicit な出力スベクトル密度 matrix の表現を求める。この場合 (23) 式に於ける入力スベクトル

密度 matrix は次のようになる。

$$\begin{aligned} [S_I(j\omega)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \{F_T(j\omega)\} \{[F_T(j\omega)]\}^* \\ &= [\bar{m}] \bar{S}_I \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

$$F_T(j\omega) = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$\bar{X}_0(j\omega) = \int_{-T}^T \ddot{x}_0(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\bar{S}_I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\bar{X}_0(j\omega) \cdot \bar{X}_0^*(j\omega)), \quad \bar{m} = \{a\} \{a\}^*$$

従って (23) 式は

$$\begin{aligned} [S_0(j\omega)] &= [G(j\omega)][\bar{m}][G(j\omega)]^* \bar{S}_I \\ &= [\beta_{ij}(j\omega)] \bar{S}_I \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}(j\omega) &= \left( \sum_{k=1}^m m_k G_{ik} \right) \left( \sum_{l=1}^m m_l G_{jl}^* \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^m m_k G_{ik} \right) \left( \sum_{l=1}^m m_l G_{lj}^* \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

更にここで減衰に関しては内部粘性減衰のみを考え基礎の回転を無視しうるような場合には次のようにまとめることができる。行列におけるラプラスの展開定理より

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{j=1}^m A_{f1} \right) G_{p1} + \left( \sum_{j=1}^m A_{f2} \right) G_{p2} + \dots\dots \\ &+ \left( \sum_{j=1}^m A_{fm} \right) G_{pm} = 1 \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

(p=1, 2, \dots\dots\dots m)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m A_{j1} &= -m_0 \omega^2 + j d_0 \omega + k_0 \\ \sum_{j=1}^m A_{ji} &= -m_i \omega^2, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \\ \sum_{j=1}^m A_{jm} &= -\bar{m}_R \omega^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

故に(14), (15), (16)式を用いて

$$\beta_{ij}(j\omega) = \left( \frac{1 - (j d_0 \omega + k_0) G_{1i}}{\omega^2} \right) \times \left( \frac{1 - (-j d_0 \omega + k_0) G_{1j}^*}{\omega^2} \right) \dots\dots\dots (30)$$

従って例えば出力スペクトル密度 matrix の diagonal elementより(29)式の有理関数の実数係数を定める形で順次伝達関数 matrix の element を定めうる。あるいは(29)式の matrix [A] が tri-diagonal な形をしていふことを利用すれば次の表現が得られる。

$$\frac{A_{i+1, i+1}}{A_{i, i+1}} = \frac{G_{i, i} G_{i+1, i+2} - G_{i, i+2} G_{i+1, i}}{G_{i+2, i+2} G_{i+1, i} - G_{i+1, i+2} G_{i+2, i}} \dots\dots\dots (31)$$

ここで内部粘性減衰分布が剛性分布に等しいと仮定すれば  $d_{i, i+1} = r k_{i, i+1}$  ( $r$ : constant), (31)式の左辺は(29)式より

$$\frac{A_{i+1, i+1}}{A_{i, i+1}} = \frac{(j d_{i, i+1} \omega + k_{i, i+1})}{(j d_{i-1, i} \omega + k_{i-1, i})} = \frac{k_{i, i+1}}{k_{i-1, i}} \dots\dots\dots (32)$$

となり、直接剛性分布をあらわす量となる。(32)式より現実的に剛性分布を定めるには数個の適当な  $\omega$  の値に対し平均的に決定することになる。

また一般の構造物は普通減衰は少く modal coupling を生じないとしてよい。このことより次のように固有振動数の点のスペクトル密度の値より振動モードを決定することができ、これより剛性分布を検討することができる。即ち  $\{\xi\}$  を一般座標 vector,  $[\phi]$  を系の固有 vector であるとすれば、

$$\{x(t)\} = [\phi] \{\xi(t)\} \cap [X(j\omega)] = [\phi] \{\Xi(j\omega)\} \dots\dots\dots (33)$$

$$[S_I^x(j\omega)] = [\phi] [S_I^{\Xi}(j\omega)] [\phi]^T \dots\dots\dots (34)$$

(T は transposed を示す)

$$\begin{aligned} \{\xi\} + 2 \begin{bmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & h_i \omega_i \\ 0 & \cdot \end{bmatrix} \{\xi\} + \begin{bmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & \omega_i^2 \\ 0 & \cdot \end{bmatrix} \{\xi\} \\ = -[\phi]^T [a] \ddot{x}_0(t) \dots\dots\dots (35) \\ = -[\beta] \ddot{x}_0(t) \end{aligned}$$

$$[\beta] = -[\phi]^T [M] : \text{刺激関数}$$

$[H(j\omega)]$  を次のような diagonal element を持つ matrix とすれば

$$H_{ii}(j\omega) = (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j h_i \omega_i \omega)^{-1} \dots\dots\dots (36)$$

$$\{\Xi(j\omega)\} = [H(j\omega)] [\beta] \ddot{x}_0(j\omega) \dots\dots\dots (37)$$

$$[S_I^{\Xi}(j\omega)] = [H(j\omega)] [\beta] [\beta]^T [H(j\omega)]^* \bar{S}_I \dots\dots\dots (38)$$

従って(34)式は次のようになる。

$$[S_I^x(j\omega)] = [\phi] [H(j\omega)] [\beta] [H(j\omega)]^* [\phi]^T \bar{S}_I$$

$$S_{I, x, ii}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \phi_{ik} \phi_{jl} S_{I, kl} \dots\dots\dots (39)$$

低次の固有振動数に対しては一般に次式が成立する。

$$\begin{aligned} S_{I, ij}^x(\omega_i) &\gg S_{I, jj}^x(\omega_i) \\ &+ (S_{I, ij}^x(\omega_i) + S_{I, ji}^x(\omega_i)) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

( $i < j$ )

故に例えば一次の固有振動数については

$$S_{I, 11}^x : S_{I, 22}^x : \dots : S_{I, nn}^x = \phi_{11}^2 : \phi_{12}^2 : \dots : \phi_{1n}^2 \dots\dots\dots (41)$$

## 4 む す び

本論文では常時微動測定より建築構造物の動特性を検出する場合に問題となる出力スペクトル密度の評価法に関するもののうち数種の window の与える影響および入力スペクトル特性による推定量のゆらぎを数値解析に基づいて検討し、また多質点系構造物の伝達関数 matrix の決定に関して若干の解析的考察を加えた。

ここで数値解析を行なったスペクトル密度の評価法について要約すれば次のようになる。

(1) 広くシステム動特性を一般的に取扱う場合には、実測データに含まれているスペクトル密度の推定量としての妥当性を問題にする必要から、推定量の resolution および stability に対する配慮に基づいて最適な window を選択することが望ましいが、通常の建築構造物の如き減衰性の少ない構造物系を対象とする場合は、ここで取扱った  $D_0(r)$  の DO NOTHING window で構造設計に関しては十分な工学的精度の評価を得ることができると考えられる。

(2) ここでは入力スペクトル特性を固有振動数を中心とする有限巾の振動数帯域にのみ power を持つ band limited white spectrum と固有振動数付近で勾配を持つ spectrum について検討したが、いずれの場合も white spectrum を想定した場合との対比で僅かな差異しか見られない。従って一自由度系を対象とする限り、あるいは構造物系のモデル化が妥当であるとする前提の上では常時微動時の入力スペクトルは white spectrum を仮定して妥当である。

## 参 考 文 献

- 1) 小堀録二, 南井良一郎, 竹内吉弘, 河野允宏 ; 鉄骨構造物の振動実験, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 昭41. 5, pp 69- 72
- 2) 小堀録二, 南井良一郎, 竹内吉弘, 河野允宏 ; 動特性を求め  
るための構造物試験について, 京都大学防災研究所年報, 11  
号, 昭43. 3, pp 475~487
- 3) 小堀録二, 南井良一郎, 竹内吉弘 ; 常時微動測定による構造  
物の減衰評価法, 第7回災害科学シンポジウム論文集, 1970.  
10, pp 67~68
- 4) R. B. Blackman & J. W. Tukey ; The Measure-  
ment of Power Spectra, Dover, N. Y. 1958
- 5) 小堀録二, 南井良一郎, 竹内吉弘 ; 確率統計的方法による多  
自由度弾性構造物の動力学特性の検出法, 京都大学防災研究  
所年報, 9号, 昭41. 3, pp 225~241